

Probabilità e statistica

1

Indice generale

1. Probabilità ed eventi aleatori.....	1
2. Come si può definire una probabilità.....	2
3. Eventi equiprobabili.....	2
4. Eventi indipendenti, eventi dipendenti.....	2
5. Eventi incompatibili.....	3
6. Eventi compatibili.....	3
7. Probabilità composta di eventi indipendenti e dipendenti.....	4
8. Definizione statistica della probabilità.....	5
9. Media aritmetica.....	6
10. Moda.....	6
11. Mediana.....	7
12. Campo di variazione.....	8
13. Esercizi.....	9
14. Bibliografia.....	10

1. Probabilità ed eventi aleatori

La **probabilità** studia le previsioni di **eventi futuri incerti**.

Un evento futuro incerto è detto evento **evento aleatorio**, o **casuale**.

La **probabilità di un evento futuro incerto** è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli (s) e il numero di tutti i casi possibili (n), purché tutti i casi considerati siano ugualmente possibili (o probabili). $p(E) = \frac{s}{n}$

La probabilità di un evento aleatorio è sempre compresa tra 0 e 1: $0 \leq p(E) \leq 1$

- Un evento che ha probabilità 0 è detto **evento impossibile**.
- Un evento che ha probabilità 1 è detto **evento certo**.
- Un evento che ha probabilità compresa fra 0 e 1 è detto **evento incerto o aleatorio**.

Ho due scatole di cioccolatini di cui una contiene 8 cioccolatini al latte, mentre l'altra 8 cioccolatini fondenti.

- *Se prendo un cioccolatino dalla prima scatola la probabilità che io prenda un cioccolatino fondente è zero ($p(E) = 0$)*
- *Se prendo un cioccolatino dalla seconda scatola la probabilità che io prenda un cioccolatino fondente è 1 ($p(E) = 1$)*
- *Se mescolo i 16 cioccolatini e ne prendo 1, la probabilità che io prenda un cioccolatino fondente è 8 su 16, cioè 1 su due ovvero 0,5 o ancora 50%*

Probabilità e statistica

2

2. Come si può esprimere una probabilità

La probabilità di un evento si può esprimere:

- come frazione, ad esempio $\frac{3}{4}$
- come numero decimale, ad esempio $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75$
- come percentuale, ad esempio $0,75 = 75\%$

3. Eventi equiprobabili

Due o più eventi casuali sono **equiprobabili** se hanno la stessa probabilità di verificarsi.

Se lancio una moneta la probabilità che esca testa o croce è uguale: i due eventi sono equiprobabili.

4. Eventi indipendenti, eventi dipendenti

Due eventi sono **indipendenti** se il verificarsi di un evento non dipende dal verificarsi dell'altro evento.

Esempio

Lanciamo due monete, i due eventi:

A= la prima moneta esce testa

B= la seconda moneta esce croce

sono indipendenti in quanto il primo evento non è legato al secondo.

Due eventi sono **dipendenti** se il verificarsi di un evento dipende dal verificarsi dell'altro.

Esempio

In un sacchetto vi sono 10 palline rosse e 10 palline verdi. Estraiamo due palline in successione, senza rimettere la prima pallina estratta nel sacchetto, i due eventi:

A= la prima pallina è rossa

B= la seconda pallina è verde

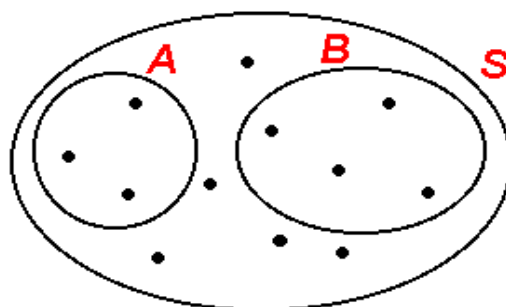
La probabilità dell'evento B dipende dalla probabilità dell'evento A. Infatti:

- $p(A) = 10/20$
- $p(B) = 10/19$ se la prima pallina è rossa;
- $p(B) = 9/19$ se la prima pallina è verde

5. Eventi incompatibili

Due eventi aleatori sono **incompatibili** se non possono verificarsi contemporaneamente, cioè si escludono tra loro.

Fig 1: *Eventi incompatibili*



La probabilità di due o più eventi incompatibili tra di loro è uguale alla somma delle probabilità di ciascuno evento.

Consideriamo un mazzo di 40 carte.

- La probabilità che esca un re (evento A) è $p(A) = \frac{4}{40} = 0,1$
- La probabilità che esca una regina (evento B) è $p(B) = \frac{4}{40} = 0,1$
- La probabilità che esca un fante (evento C) è $p(C) = \frac{4}{40} = 0,1$

I tre eventi sono incompatibili tra loro, allora la probabilità che esca una figura è

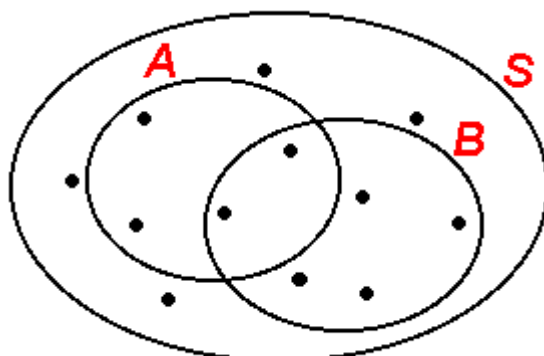
$$p = p(A) + p(B) + p(C) = \frac{4}{40} + \frac{4}{40} + \frac{4}{40} = 0,3$$

6. Eventi compatibili

Due eventi sono **compatibili** se c'è anche una sola possibilità che possano verificarsi contemporaneamente, in una data prova.

La probabilità totale di due eventi compatibili è data dalla somma delle probabilità meno la probabilità dell'evento intersezione degli eventi dei due dati

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$



ESERCIZIO

Gli alunni di una classe sono 30: di questi 10 giocano a calcio, 8 a tennis, 4 ad entrambi. Se l'insegnante di educazione fisica ne chiama uno a caso, che probabilità ha che questo ragazzo sia in grado di praticare almeno una delle due attività considerate?

- $p(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ (10 su 30 giocano a calcio)
- $p(B) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$ (8 su 30 giocano a tennis)
- $p(A \cap B) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$ (4 praticano entrambi gli sport)
- $p(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{4}{15} - \frac{2}{15} = \frac{7}{15}$

7. Probabilità composta di eventi indipendenti e dipendenti

L'**evento composto** è un evento composto da più eventi che possono essere indipendenti tra loro o dipendenti tra loro.

La **probabilità composta** è data dal prodotto delle probabilità dei singoli eventi.

PRIMO ESEMPIO: eventi indipendenti

Trovare la probabilità che estraendo successivamente due carte da un mazzo di 40 e rimettendo la prima carta estratta nel mazzo siano la prima una figura e la seconda un asso. La probabilità è composta dai due eventi indipendenti

- A= uscita di una figura
 - B= uscita di un asso
- $$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = \frac{12}{40} \times \frac{4}{40} = \frac{3}{100} = 0,03$$

Probabilità e statistica

5

SECONDO ESEMPIO: eventi dipendenti

Trovare la probabilità che estraendo successivamente due carte da un mazzo di 40, senza rimettere la prima estratta nel mazzo, siano la prima una figura e la seconda un asso. La probabilità è composta dai due eventi dipendenti

- A= uscita di una figura
- B= uscita di un asso

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = \frac{12}{40} \times \frac{4}{39} = \frac{2}{65}$$

8. Definizione statistica della probabilità

In una serie di prove ripetute un gran numero di volte nelle stesse condizioni, ciascuno degli eventi possibili si manifesta con una frequenza relativa che è presso a poco uguale alla sua probabilità. L'approssimazione cresce con il numero delle prove.

La **frequenza relativa** di un evento è il rapporto fra il numero di volte che si è verificato tale evento e il numero totale delle prove fatte: si può esprimere con una frazione, un numero decimale o una percentuale.

9. Media aritmetica

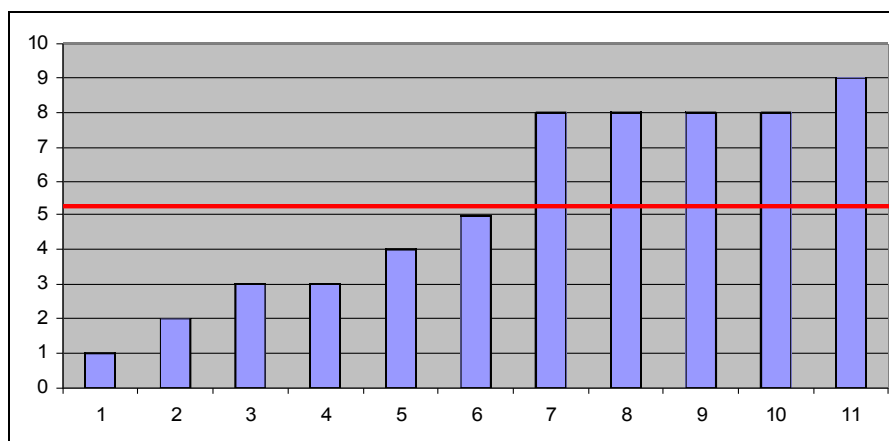
La **media aritmetica** è il rapporto tra la somma dei dati e il numero dei dati.

$$media = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

ESEMPIO

Calcolare la media dei seguenti valori: 8; 3; 4; 8; 1; 2; 9; 3; 8; 5; 8

$$media = \frac{8 + 3 + 4 + 8 + 1 + 2 + 9 + 3 + 8 + 5 + 8}{11} = 5,36$$



Probabilità e statistica

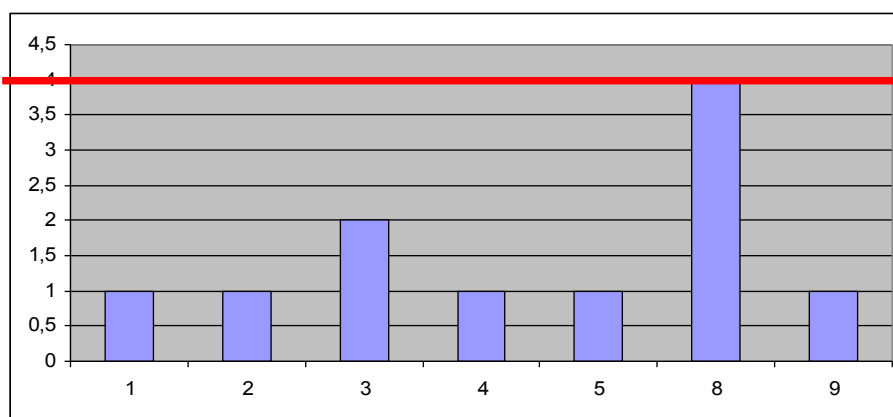
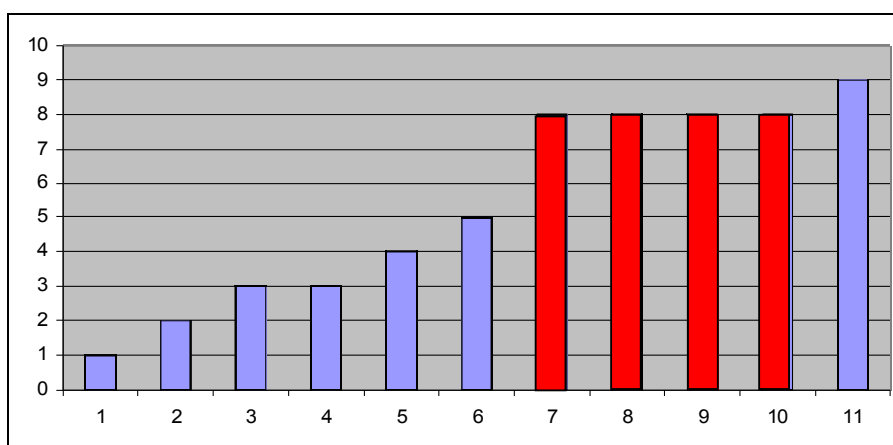
6

N.B.

Per il calcolo della media non è necessario mettere in ordine i valori.

10. Moda

La **moda** è il dato che si presenta con maggior frequenza.



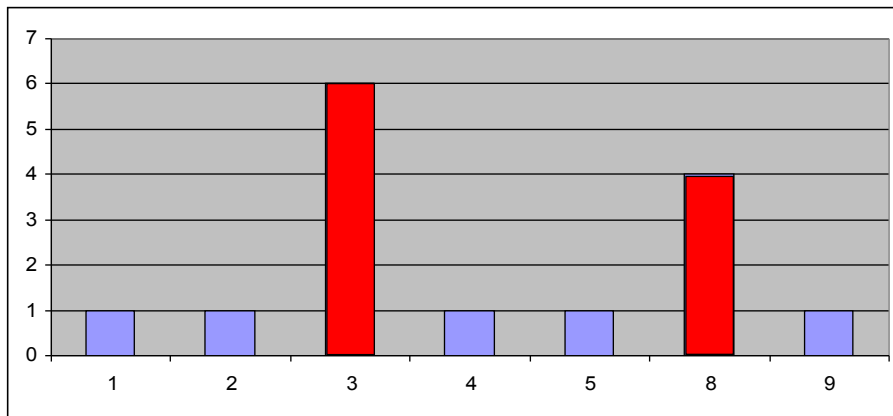
In questo esempio la **moda è 8**, perchè è il numero con maggiore frequenza, cioè frequenza 4.

N.B.

Se esiste un solo numero con maggiore frequenza si dice che la distribuzione è unimodale, se esistono più numeri con alta frequenza si dice che la distribuzione è bimodale, trimodale, ...

Probabilità e statistica

7



L'esempio rappresenta una distribuzione bimodale perchè i numeri presenti con frequenza maggiore sono il 3 e l'8.

La moda è un indice di posizione che per un venditore di scarpe può indicare quale numero è più richiesto. Può essere utile anche quando i dati sono qualitativi e non quantitativi per cui non è possibile realizzare un ordine numerico, tipo la moda del colore dei capelli di un campione di ragazzi.

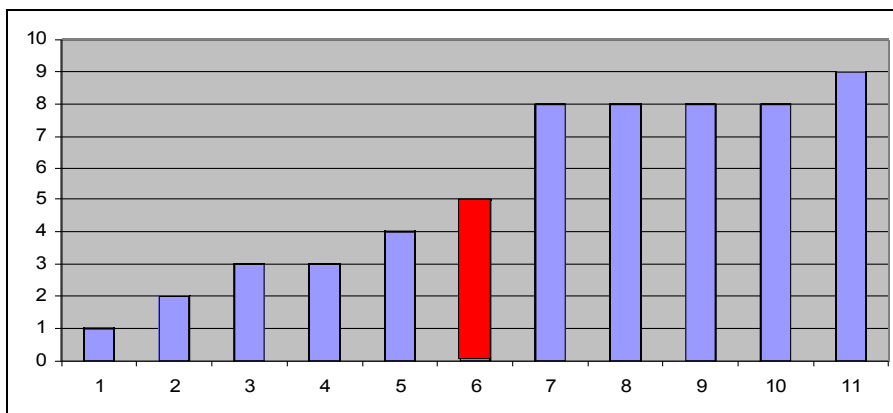
11. Mediana

La **mediana** è il valore che occupa il posto centrale in una serie di dati di sposti in ordine crescente; se i dati sono in numero pari, la mediana è la media dei due valori centrali.

1	2	3	3	4	5	8	8	8	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

1	2	3	3	3	4	5	6	6	8	8	8	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Nel primo esempio la **mediana** è **5**, nel secondo esempio la **mediana** è $(5+6):2=5,5$



La mediana è un indice di posizione utile quando i dati sono quantitativi ordinabili. Esempio raccolta dati sul numero di fratelli o sul numero di bibite bevute in un periodo.

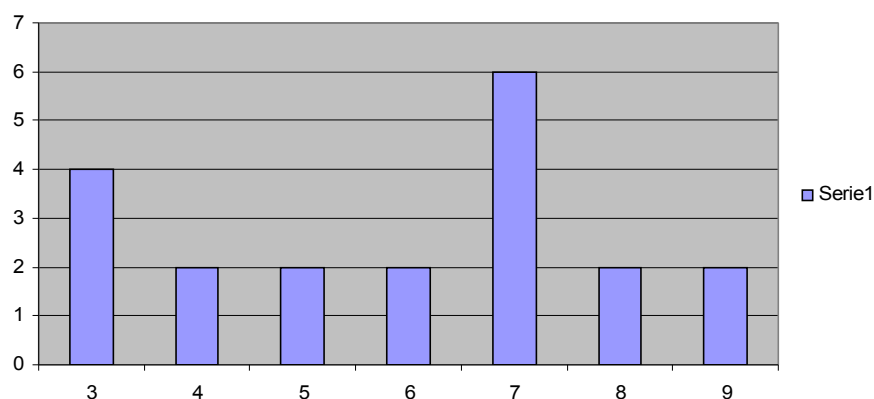
Probabilità e statistica

8

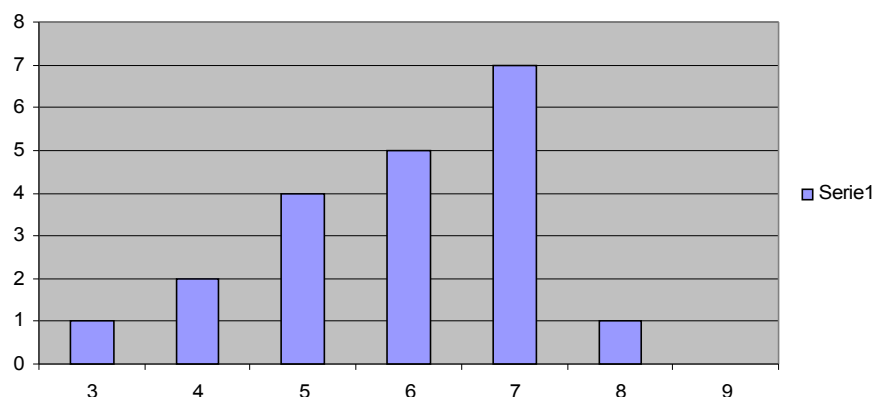
12. Campo di variazione

Due classi hanno raggiunto nel compito di matematica la stessa media. Possiamo dire che il livello delle due classi è uguale?

5	6	6		5	7	7	4	7	6	6	7	7	4	5	5	6	7	3	8
---	---	---	--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



7	8	3	3	4	5	7	6	9	4	3	7	5	6	7	7	3	8	9	8
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---



Il campo di variazione o gamma di distribuzione di un insieme numerico è la differenza fra il dato massimo e il dato minimo.

Nelle due classi si ha la stessa media, ma il campo di variazione diverso:

- campo di variazione della prima classe è $(9-3)=6$
- campo di variazione seconda classe è $(8-3)=5$

Nella prima classe vi è una maggiore dispersione di voti (lo si nota dal grafico che è più ampio sull'asse x), la moda è 7 e 3 e quindi si fa più fatica a far recuperare i voti negativi.

Nella seconda classe vi è meno dispersione, la moda è 7, 6 e 5 e quindi si hanno meno elementi gravi da recuperare.

Probabilità e statistica

9

13. Esercizi

- Una lettera viene scelta a caso dalla parola MATEMATICA. Calcola la probabilità che essa sia
 - una M
 - una vocale
 - non una T
- Un sacchetto contiene 16 biglie rosse, 10 biglie blu, 14 verdi e 10 gialle. Qual è la probabilità di estrarre
 - Una biglia rossa
 - una biglia verde
 - non una biglia blu
 - una biglia rossa o verde
- Calcola la probabilità che, lanciando un dado, esca
 - Il 4 o il 6
 - il 5 o un numero pari
 - un numero primo o un numero pari
 - un numero dispari o un numero minore di 3
- Calcola la probabilità di estrarre da un mazzo di carte di scala 40
 - un 7 o un 9
 - una figura o un asso
 - una carta di cuori o di picche
 - una carta di cuori
 - un re o un carta di picche
 - una figura o una carta di fiore
 - una figura
 - un asso
- Qual è la probabilità di estrarre una biglia rossa o verde da un sacchetto che contiene 16 biglie rosse, 10 biglie verdi, 14 biglie blu, 10 biglie gialle?

Esercizi: [Zanichelli](#)

14. Bibliografia

- [Mini teoria della probabilità](#) (Guido Castelnuovo, *Calcolo delle probabilità*, Zanichelli)
- [Probabilità condizionata e ...](#) (Zanichelli)
- [Introduzione alla probabilità nella scuola media: concetti base](#)